Capitolo 10

Forme bilineari e quadratiche

Soluzioni Esercizi

Esercizio 10.5.1. Mostrare che $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con
$\varphi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 + 2x_1y_2 - z_1(y_2 + z_2)$
è una forma bilineare e scriverne la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

Soluzione Esercizio: Verifichiamo le proprietà delle forme bilineari. Siano $\mathbf{v} = (x, y, z)$, $\mathbf{v}' = (x', y', z')$, $\mathbf{w} = (a, b, c)$, $\mathbf{w}' = (a', b', c')$ vettori di $\mathbb{R}^3$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w}) = \varphi((x, y, z) + (x', y', z'), (a, b, c)) = \varphi((x + x', y + y', z + z'), (a, b, c)) = (x + x')a + 2(x + x')b - (z + z')(b + c) = xa + x'a + 2xb + 2x'b - z(b + c) - z'(b + c) = \varphi((x, y, z), (a, b, c)) + \varphi((x', y', z'), (a, b, c)) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{v}', \mathbf{w})$.

2. $\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{w}') = \varphi((x, y, z), (a, b, c) + (a', b', c')) = \varphi((x, y, z), (a + a', b + b', c + c')) = x(a + a') + 2x(b + b') - z(b + b' + c + c') = xa + xa' + 2xb + 2xb' - z(b + c) - z(b' + c') = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}')$.

3. $\varphi(\alpha\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varphi(\alpha(x, y, z), (a, b, c)) = \varphi((\alpha x, \alpha y, \alpha z), (a, b, c)) = \alpha xa + 2\alpha xb - \alpha z(b + c) =$

    - $= \varphi((x, y, z), (\alpha a, \alpha b, \alpha c)) = \varphi((x, y, z), \alpha(a, b, c)) = \varphi(\mathbf{v}, \alpha w)$;
    - $= \alpha(xa + 2xb - z(b + c)) = \alpha\varphi((x, y, z), (a, b, c)) = \alpha\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

La φ soddisfa tutte le proprietà delle forme bilineari, quindi è una forma bilineare. La sua matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10.5.2. Sia
$\varphi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - (y_1 + z_1)(y_2 + z_2)$.
Stabilire se è una forma bilineare simmetrica, dire se il vettore $(1, 1, 1)$ è isotropo per φ.

Soluzione Esercizio: Prima di tutto dobbiamo verificare che sia una forma bilineare. Siano $\mathbf{v} = (x, y, z)$, $\mathbf{v}' = (x', y', z')$, $\mathbf{w} = (a, b, c)$, $\mathbf{w}' = (a', b', c')$ vettori di $\mathbb{R}^3$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w}) = \varphi((x, y, z) + (x', y', z'), (a, b, c)) = \varphi((x + x', y + y', z + z'), (a, b, c)) = (x + x')a + 2(x + x')b - (y + y', z + z')(b + c) = xa + x'a + 2xb + 2x'b - (y + z)(b + c) - (y' + z')(b + c) = \varphi((x, y, z), (a, b, c)) + \varphi((x', y', z'), (a, b, c)) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{v}', \mathbf{w})$.

2. $\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{w}') = \varphi((x, y, z), (a, b, c) + (a', b', c')) = \varphi((x, y, z), (a + a', b + b', c + c')) = x(a + a') + 2x(b + b') - (y + z)(b + b' + c + c') = xa + xa' + 2xb + 2xb' - (y + z)(b + c) - (y + z)(b' + c') = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}')$.

3. $\varphi(\alpha\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varphi(\alpha(x, y, z), (a, b, c)) = \varphi((\alpha x, \alpha y, \alpha z), (a, b, c)) = \alpha xa + 2\alpha xb - \alpha(y + z)(b + c) =$

   - $= \varphi((x, y, z), (\alpha a, \alpha b, \alpha c)) = \varphi((x, y, z), \alpha(a, b, c)) = \varphi(\mathbf{v}, \alpha w)$;
   - $= \alpha(xa + 2xb - (y + z)(b + c)) = \alpha\varphi((x, y, z), (a, b, c)) = \alpha\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

La φ soddisfa tutte le proprietà delle forme bilineari, quindi è una forma bilineare. La sua matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

che è una matrice simmetrica quindi φ è una forma bilineare simmetrica.

Consideriamo ora $\varphi((1, 1, 1), (1, 1, 1)) = 1 \neq 0$ quindi il vettore $(1, 1, 1)$ non è isotropo per φ.

Esercizio 10.5.3. Sia
$\varphi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - y_1y_2$.
Stabilire se è una forma bilineare simmetrica, calcolare tutti i vettori isotropi di φ e stabilire se si tratta di una forma degenere.

Soluzione Esercizio: Prima di tutto dobbiamo verificare che sia una forma bilineare. Siano $\mathbf{v} = (x, y, z)$, $\mathbf{v}' = (x', y', z')$, $\mathbf{w} = (a, b, c)$, $\mathbf{w}' = (a', b', c')$ vettori di $\mathbb{R}^3$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w}) = \varphi((x, y, z) + (x', y', z'), (a, b, c)) = \varphi((x + x', y + y', z + z'), (a, b, c)) = (x + x')a + 2(x + x')b + 2(y + y')a - (y + y')b = xa + x'a + 2xb + 2x'b + 2ya + 2y'a - yb - y'b = \varphi((x, y, z), (a, b, c)) + \varphi((x', y', z'), (a, b, c)) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{v}', \mathbf{w})$.

2. $\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{w}+\mathbf{w}') = \varphi((x,y,z),(a,b,c)+(a',b',c')) = \varphi((x,y,z),(a+a',b+b',c+c')) = x(a+a')+2x(b+b')+2y(a+a')-y(b+b') = xa+xa'+2xb+2xb'+2ya+2ya'-yb-yb' = \varphi(\mathbf{v},\mathbf{w})+\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w}')$.

3. $\varphi(\alpha\mathbf{v},\mathbf{w}) = \varphi(\alpha(x,y,z),(a,b,c)) = \varphi((\alpha x,\alpha y,\alpha z),(a,b,c)) = \alpha xa+2\alpha xb+2\alpha ya-\alpha yb =$

   - $= \varphi((x,y,z),(\alpha a,\alpha b,\alpha c)) = \varphi((x,y,z),\alpha(a,b,c)) = \varphi(\mathbf{v},\alpha w)$;
   - $= \alpha(xa+2xb+2ya-yb) = \alpha\varphi((x,y,z),(a,b,c)) = \alpha\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w})$.

La φ soddisfa tutte le proprietà delle forme bilineari, quindi è una forma bilineare. La sua matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è una matrice simmetrica quindi φ è una forma bilineare simmetrica.

Calcoliamo ora i vettori isotropi:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

svolgendo i calcoli, questa equazione diventa

$$x^2+4xy-y^2=0.$$

Quindi i vettori $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ che la soddisfano devono verificare che $(x-(-2+\sqrt{3})y)(x-(-2-\sqrt{3})y)=0$ ossia sono del tipo $\{((-2+\sqrt{3})y,y,z)\}\cup\{((-2-\sqrt{3})y,y,z)\}$. Li abbiamo rappresentati in Figura 10.1

Figura 10.1: Esercizio 10.5.3.: Vettori isotropi.

Esercizio 10.5.4. La seguente forma quadratica è un prodotto scalare?

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Calcolarne la segnatura e stabilire la base B rispetto alla quale $M_B(\varphi)$ è nella forma di Sylvester.

Soluzione Esercizio: NB: Notiamo che la φ scritta nel testo dell'esercizio è una forma bilieare, non una forma quadratica. La forma quadratica ad essa associata è

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\varphi((x_1, x_2)) = 2x_1 x_2.$$

Iniziamo col verificare le proprietà del prodotto scalare. Siano $\mathbf{v} = (x, x')$, $\mathbf{v}_1 = (x_1, x'_1)$, $\mathbf{v}_2 = (x_2, x'_2)$, $\mathbf{w} = (y, y') \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$.

1. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (x, x') \cdot ((x_1, x'_1) + (x_2, x'_2)) = (x, x') \cdot ((x_1 + x_2, x'_1 + x'_2)) = x(x'_1 + x'_2) + x'(x_1 + x_2) = xx'_1 + x'x_1 + xx'_2 + x'x_2 = (x, x') \cdot (x_1, x'_1) + (x, x') \cdot (x_2, x'_2) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2$;
2. $\mathbf{v} \cdot (a\mathbf{w}) = (x, x') \cdot (a(y, y')) = (x, x') \cdot (ay, ay') = axy' + ax'y =$
   - $= (ax, ax') \cdot (y, y') = (a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$,
   - $= a(x, x') \cdot (y, y') = a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$;
3. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (x, x') \cdot (y, y') = xy' + x'y = yx' + y'x = (y, y') \cdot (x, x') = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$;
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (x, x') \cdot (x, x') = 2xx' > 0$ solo se x e x' sono entrambi strettamente positivi o entrambi strettamente negativi, quindi per gli elementi di $\mathbb{R}^2$ con coordinate discordi si verifica che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} < 0$ quindi φ NON è un prodotto scalare.

La matrice associata a φ rispetto alle basi canoniche è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. I suoi autovalori sono $\lambda = \pm 1$, quindi la forma canonica associata a Q è $Q = x^2 - x'^2$, da cui si deduce che la segnatura è $(1, 1)$. In effetti si poteva dedurre che non era un prodotto scalare dal fatto che non fosse definita positiva.

Esercizio 10.5.5. Sia $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la seguente forma quadratica
$Q(x, y, z) = x^2 - y^2 + xz - 2yz$.
Dire se è definita positiva, negativa o indefinita e scriverla in forma canonica.

Soluzione Esercizio: La matrice associata a Q rispetto alla base canonica è : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ i cui autovalori sono $\lambda_1 = 1.29211, \lambda_2 = 0.35286, \lambda_3 = -1.64497$ dunque è indefinita e la sua forma canonica è $Q = 1.29211x^2 + 0.35286y^2 - 1.64497z^2$.

Esercizio 10.5.6. Qual è la forma normale della seguente forma quadratica? $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x, y, z, t) = xy - yz + zt$. Qual è la base rispetto alla quale si può scrivere in forma normale?

Soluzione Esercizio: $M_{\mathcal{E}}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. La base rispetto alla quale può essere scritta in forma normale è costituita dai seguenti vettori $B = (0.6015, 0.3717, 0.3717, 0.6015)/0.5559$, $(-0.3717, -0.6015, 0.6015, 0.3717)/0.8994$, $(-0.3717, 0.6015, 0.6015, -0.3717)/0.8994$, $(0.6015, -0.3717, 0.3717, -0.6015)/0.5559$.

Esercizio 10.5.7. Scrivere una base ortonormale rispetto alla seguente forma bilineare: $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con
$\varphi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = (x_1x_2 + 2y_1y_2 - (1/2)z_1z_2)$.

Soluzione Esercizio: Stiamo cercando 3 vettori di $\mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti tali che la loro norma rispetto a φ sia 1, ossia se essi sono $\mathbf{v}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ si deve avere che $x_i^2 + 2y_i^2 - (1/2)z_i^2 = 1$ per ogni $i = 1, 2, 3$. Inoltre devono essere ortogonali rispetto a φ tra di loro, quindi $x_ix_j + 2y_iy_j - (1/2)z_iz_j = 0$ per ogni $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$. Ad esempio i seguenti vettori soddisfano le condizioni richieste $\mathbf{v}_1 = (\sqrt{3}, 0, 2), \mathbf{v}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \mathbf{v}_3 = (-\sqrt{3}, 0, 2)$.

Esercizio 10.5.8. Classificare le seguenti coniche:

- $x^2 - xy - 3y^2 + 1 = 0$;
- $y^2 - xy + 3 = 0$;
- $x^2 + 2x - 4y + 5 = 0$;
- $2x^2 - xy + y - 1 = 0$;
- $x^2 + 2xy + y^2 = 0$.

Soluzione Esercizio: Il Δ di tutte tranne la terza (per la quale è nullo) è positivo: quindi la terza è una parabola, le altre sono tutte iperboli.

Esercizio 10.5.9. Dire se le seguenti quadriche sono o no a centro:

- $xy - xz = 0$;
- $x^2 + xy - xz = 1$;
- $2x^2 + x - y + xz = 4$.

Soluzione Esercizio: Sono tutte non a centro.

Esercizio 10.5.10. Classificare le seguenti quadriche:

- $x^2 + y^2 - 8z = 0$;
- $xy - z^2 = 9$;
- $4x + y - z^2 + x^2 = 1$;
- $x^2 - xz + 3z^2 = 0$;
- $xy - xz = 1$.

Soluzione Esercizio:

- $x^2+y^2-8z = 0$: Quadrica non degenere non a centro, in particolare è un paraboloide ellittico.
- $xy-z^2 = 9$: Quadrica non degenere a centro. Si verifica facilmente che gli autovalori della matrice associata rispetto alla base canonica sono $1/2, -1/2, -1, 9$ si tratta quindi di un iperboloide ad una falda.
- $4x + y - z^2 + x^2 = 1$: Quadrica non degenere non a centro, in particolare si tratta di un parabolide iperbolico.
- $x^2-xz+3z^2 = 0$: Quadrica degenere con $r(A_Q) = 2$ in particolare si tratta di due piani complessi incidenti.
- $xy - xz = 1$: Quadrica degenere con $r(A_Q) = 3$, in particolare è un cilindro ellittico.

Esercizio 10.5.11. * Considerare la quadrica definita da:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dire se tale quadrica sia o no degenere e classificarla.

Soluzione Esercizio: Se svolgiamo i conti troviamo che la quadrica in questione ha equazione

$$x^2 + 2xy + xz + x + y^2 + yz + y + z^2 + 1 = 0$$

la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi canoniche è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è una quadrica degenere con $r(A_Q) = 3$, in particolare si tratta di un cilindro ellittico immaginario.